ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ
Областной олимпиады обучающихся учреждений профессионального образования Кемеровской области по дисциплине
МАТЕМАТИКА

1 вариант

Решения задач.

1) При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$3x^2+30x+a=0$$

равна 40?

Решение. Подсчитав дискриминант трехчлена, находим

$$D_1=15^2-3a=3(75-a).$$

Следовательно, корни x_1, x_2 данного уравнения существуют при

$$a\le 75. \qquad (*)$$

Сумму их квадратов найдем, применяя теорему Виета. В силу этой теоремы:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-10, \\ x_1x_2=\dfrac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=100, \\ 2x_1x_2=\dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=100-\frac{2a}{3}.$$

Отсюда и из условия задачи получаем уравнение

$$100-\frac{2a}{3}=40,$$

решив которое, находим

$$a=90.$$

Полученное значение параметра a нарушает неравенство (*).

Ответ: **таких значений параметра не существует**.

2) Докажите, что число

$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$$

целое и найдите это число

Решение.

$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}=\sqrt[3]{\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3}=3-\sqrt[3]{26}.$$

Поэтому

$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}=3.$$

3) В шахматном турнире, в котором по регламенту каждый должен был играть с каждым ровно одну партию, двое из участников выбыли, сыграв

только по три партии каждый. Поэтому на турнире было сыграно только 84 партии. Сколько было участников первоначально и играли ли выбывшие участники между собой?

Решение. Пусть $n+2$ - первоначальное число участников. Тогда n - число участников, прошедших турнир до конца, и число партий, сыгранных ими между собой, подсчитывается так:

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)+1}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Возможны 2 варианта.

а). Выбывшие участники не играли между собой. В этом случае общее число партий, сыгранных на турнире, подсчитывается так:

$$\frac{n(n-1)}{2}+6.$$

Из условия задачи выводим квадратное уравнение

$$\frac{n(n-1)}{2}+6=84,$$

решив которое, найдем $n_1=-12, n_2=13.$ По смыслу задачи $n-$ натуральное число. Следовательно, первый корень отбрасываем, как посторонний.

б). Выбывшие участники играли между собой. В этом случае общее число партий, сыгранных на турнире, подсчитывается так:

$$\frac{n(n-1)}{2}+5.$$

Из условия задачи выводим квадратное уравнение

$$\frac{n(n-1)}{2}+5=84 \Leftrightarrow n^2-n-158=0,$$

не имеющее целых корней.

Ответ: **первоначальное число участников равно 15; выбывшие участники не играли между собой**

4). Представить многочлен

$$x^4-22x^2+9$$

в виде произведения двух многочленов степени не ниже первой с <u>*целыми*</u> коэффициентами.

Решение.

$$x^4-22x^2+9=x^4-6x^2+9-16x^2=\left(x^2-3\right)^2-(4x)^2=$$
$$=\left(x^2-3-4x\right)\cdot\left(x^2-3+4x\right)=\left(x^2-4x-3\right)\cdot\left(x^2+4x-3\right).$$

5) Решите уравнение

$$\left(x^2-x-1\right)^2-x^3=5.$$

Решение.

$$\left(x^2-x-1\right)^2-x^3=5 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)^2-4-\left(x^3+1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-3\right)\left(x^2-x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x-4\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

6. Докажите, что если $a\geq 0, b\geq 0,$ то

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2},$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $a=b.$

Решение. Если $a\geq 0, b\geq 0,$ то справедливы неравенства

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$$

Из этой цепочки равносильных переходов видно, что неравенство превращается в равенство в том и только в том случае, когда $a=b.$

7) В угол ABC вписаны две окружности, одна из которых касается стороны AB в точке $A,$ а другая – стороны BC в точке $C.$ Докажите, что эти окружности высекают на прямой AC равные отрезки.

Решение.

По свойству секущих (см. рис. 1) имеем:

$$CX\cdot CA=CE^2,\quad AY\cdot AC=AD^2.$$

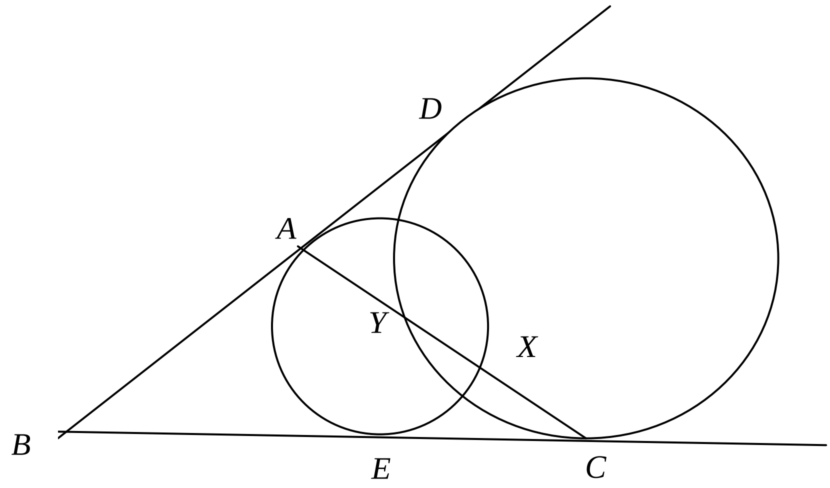

Рис. 1

Но так как $CE=AD,$ то отсюда следует: $CX=AY,$ т.е. $AX=CY,$ что и требовалось доказать.

8) Написать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=-x+2$ и проходящей через точку $A(0;1).$

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой равен 1. Учитывая, что прямая проходит через точку A, получаем

Ответ: $y=x+1$.

9) Решите уравнение

$$tgx\cdot\sqrt{-\cos x}=0.$$

Решение.

$$tgx\cdot\sqrt{-\cos x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} tgx=0, \\ \cos x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi n \ (n\in Z), \\ \cos x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pi(2m+1), m\in Z.$$

10) Можно ли заложить доску размерами 10×10 плитками, имеющими форму буквы Т (рис.2), каждая из которых состоит из четырех клеток?

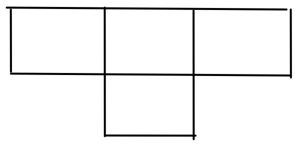

Рис. 2

Решение. Раскрасим клетки доски, как в шахматах, в два цвета. Тогда каждая плитка будет закрывать 3 черных клетки и 1 белую (или наоборот). Если допустить, что покрытие доски возможно, то оно будет состоять из 25 клеток, причем им будет покрыто нечетное число белых и нечетное число черных клеток – противоречие.

Вариант 2

Решения задач

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2-(a+1)x+2a-1=0$$

имеет один корень?

Решение. 1) При $a=0$ уравнение является линейным:

$$-x-1=0$$

и имеет один корень $x=-1$.

2). При $a\neq0$ данное уравнение – квадратное и имеет один корень в случае нулевого дискриминанта. Находим этот дискриминант:

$$D=(a+1)^2-4a(2a-1)=-7a^2+6a+1$$

и приравнивая его к нулю:

$$7a^2-6a-1=0,$$

получаем $a=-1/7,\ a=1$.

Ответ: $-\frac{1}{7};\ 0;\ 1.$

2) Сумма двух целых чисел m и n равна 101, а разность их квадратов – простое число. Найдите m и n.

Решение. В соответствии с условием имеем уравнения

$$\begin{cases} m+n=101, \\ m^2-n^2=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=101, \\ (m+n)(m-n)=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=101, \\ 101\cdot(m-n)=p. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что p делится на 101, но p - простое число, следовательно, $p=101$. Тогда

$$\begin{cases} m+n=101, \\ m-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=51, \\ n=50. \end{cases}$$

3) Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

Решение. Пусть L - длина окружности (выраженная в некоторых единицах), t – время (в секундах) прохождения окружности первым телом, $t+3$ – вторым телом. Тогда

$$\frac{L}{t},\ \frac{L}{t+3}$$

- скорости движения первого и второго тел соответственно. По условию задачи первое тело каждые 90 секунд догоняет второе, т.е. за 90 секунд оно преодолевает расстояние на L единиц большее, чем второе. Отсюда следует уравнение

$$\frac{L}{t}\cdot 90-\frac{L}{t+3}\cdot 90=L \Rightarrow t^2+3t-270=0 \Leftrightarrow \text{t=-18},\ \text{t=15}.$$

Отбрасывая посторонний корень, получаем

Ответ: 15 сек., 18 сек.

4). Представить многочлен

$$x^4-12x^2+4$$

в виде произведения двух многочленов степени не ниже первой с целыми коэффициентами.

Решение.

$$x^4-12x^2+4=x^4+4x^2+4-16x^2=\left(x^2+2\right)^2-(4x)^2=$$
$$=\left(x^2+2-4x\right)\cdot\left(x^2+2+4x\right)=\left(x^2-4x+2\right)\cdot\left(x^2+4x+2\right).$$

5) Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известно, что одним из его корней служит число

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\sqrt{15}-4.$$

Составим уравнение

$$x=\sqrt{15}-4$$

и преобразуем его

$$x=\sqrt{15}-4 \;\Leftrightarrow\; x+4=\sqrt{15} \;\Rightarrow\; (x+4)^2=15 \;\Leftrightarrow\; x^2+8x+1=0.$$

6) Докажите, что для любого положительного числа t справедливо неравенство

$$t+\frac{1}{t}\geq 2.$$

Решение.

$$t+\frac{1}{t}=\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+2\geq 2.$$

7) Даны 99 отрезков с длинами 1, 2, 3, …, 99. Можно ли из этих отрезков составить
а) квадрат;
б) прямоугольник?

Решение. Общая длина всех отрезков:

$$1+2+...+99=\frac{1+99}{2}\cdot 99=4950$$

не кратна числу 4 и, следовательно, квадрат составить нельзя.

Теперь из пар отрезков длин 1 и 98, 2 и 97, 3 и 96,…, 49 и 50 составим новые отрезки, имеющие каждый длину 99; таковых будет 49. Кроме того, последний отрезок из первоначального набора уже имеет эту длину. Итак, имеем 50 отрезков равной длины, из которых можно составить прямоугольник.

8) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y\leq 0, \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство выделяет на координатной плоскости круг радиуса 1 с центром в точке $A(0;1)$, второе – полуплоскость $x\geq 0$. Получающаяся в результате пересечения фигура - полукруг радиуса 1 (рис.1). Его площадь равна $\pi/2$.

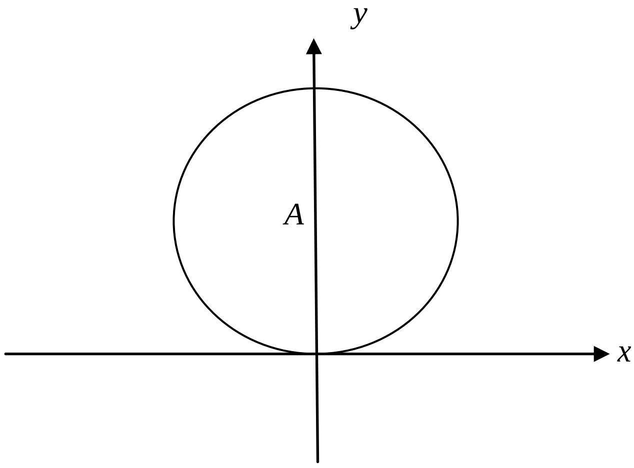

Рис. 1

9) Вычислите без таблиц и калькулятора

$$\sin^2 11^\circ + \sin^2 131^\circ + \sin^2 109^\circ.$$

Решение. $\sin^2 11^\circ + \sin^2 131^\circ + \sin^2 109^\circ = \dfrac{1-\cos 22^\circ}{2} + \dfrac{1-\cos\left(270^\circ - 8^\circ\right)}{2} +$

$$+\frac{1-\cos\left(270^\circ - 52^\circ\right)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\cos 22^\circ - (\sin 8^\circ + \sin 52^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\cos 22^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 22^\circ}{2} = \frac{3}{2}.$$

Замечание. Использовались тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2},\ \sin^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2},\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

10) В каждой клетке доски размером 7×7 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают на соседние (по вертикали или горизонтали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

Решение. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Тогда из 49 клеток доски 25 окажутся черными, 24 – белыми (или наоборот). В некоторый момент времени 25 жуков с черных клеток переползут на соседние белые клетки, которых 24, и займут они не более 24 клеток. Другие 24 жука с белых клеток переползут на черные и займут не более 24 черных клеток. Следовательно, хотя бы одна клетка окажется пустой.